

МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПОТОЧНОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ

дисципліна Теорія ймовірностей
та математична статистика
(шифр і назва навчальної дисципліни)

спеціальність 123 Комп'ютерна інженерія
(шифр і назва спеціальності)

освітня програма Обслуговування комп'ютерних систем і мереж
(назва освітньої програми)

відділення Комп'ютерних технологій та систем
(назва відділення)

Розробив: Буряк Г.І.

Розглянуто та схвалено
на засіданні циклової комісії

математики та інформатики

Протокол № _____ від _____ 2023 р

Голова комісії _____ Малик О.М.

Приклади завдань для самостійної роботи

Завдання 1. Класичне означення ймовірності

1. Серед 25 фірм, з яких 10 українських, а інші російські, розігрується 5 урядових контрактів. Вважається, що кожна фірма має рівні шанси на отримання контракту. Знайти ймовірність того, що принаймні дві українські фірми виграють контракт.

2. У фірмі 10 співробітників (6 чоловіків і 4 жінки) претендують на заміщення трьох вакансій. Вважають, що всі кандидатури мають рівні шанси на зайняття цих вакансій. Знайти ймовірність того, що жінки не займуть жодної вакансії.

3. У групі з 12 бізнесменів тільки 8 мають досвід роботи у запропонованій новій галузі. Для проекту потрібно відібрати 4 особи. За припущення, що відбір претендентів проводять навмання, знайти ймовірність того, що в команду з чотирьох чоловік потраплять всі, хто має досвід роботи.

4. Комплект містить 7 виробів першого сорту, 6 – другого сорту і 2 вироби – третього сорту. Навмання обирають 5 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них не виявиться виробів третього сорту.

5. Із 15 рейсів, що виконуються з аеропорту протягом доби, 60 % рейсів виконуються на власному літаковому парку. Знайти ймовірність того, що з вибраних навмання 5 рейсів рівно 3 виконуються на власному парку.

6. 12 виробів, серед яких 4 нестандартних, випадковим способом розбиваються на дві рівні партії. Знайти ймовірності того, що: а) у кожній партії буде рівна кількість нестандартних виробів; б) усі нестандартні вироби будуть в одній партії.

7. У конкурсі газети бере участь 12 чоловіків та 8 жінок. Є два призових місця. За припущення, що відбір претендентів ведуть навмання, яка ймовірність того, що обидва місця займуть жінки?

8. З 10 літаків, що прибувають в аеропорт протягом доби, 80 % мають повне комерційне завантаження. Знайти ймовірність того, що серед п'яти випадковим способом узятих літаків тільки 4 мають повне завантаження.

9. В авіакасі було 15 квитків, серед яких 6 квитків до пункту A . До кінця зміни продано 8 квитків. Знайти ймовірність того, що в касі не залишилося квитків до пункту A , якщо ймовірність продажу кожного квитка однакова.

10. Партія з 30 виробів містить 10 % браку. Знайти ймовірність того, що серед 7 виробів, узятих випадково: а) тільки 2 бракованих; б) жодного бракованого.

Відповіді: 1. 0,9435. 2. $\frac{1}{6}$. 3. 0,141. 4. $\frac{3}{7}$. 5. $\frac{60}{143}$. 6. а) 0,455; б) 0,065.

7. $\frac{14}{95}$. 8. $\frac{5}{9}$. 9. $\frac{4}{715}$. 10. а) 0,119; б) 0,436.

Завдання 2. Статистичні та геометричні ймовірності

1. До авіакаси у випадковий час у межах 10 хв звернулось 2 пасажир. Обслуговування одного пасажир триває 2 хв. Знайти ймовірність того, що пасажир, який звернувся другим, буде вимушений зачекати.

2. Відділ технічного контролю видавництва виявив 5 бракованих книжок у партії з випадково відібраних 250 книжок. Знайти відносну частоту виявлення бракованих книжок.

3. Два літаки прибувають у зону аеропорту у випадковий час між 12:00 і 12:30. Знайти ймовірність того, що літак, який прибув другим, не буде вимушений чекати дозволу на посадку, якщо чергову посадку можна здійснювати не раніше, ніж за 10 хв після попередньої.

4. У рівнобедреному трикутнику з бічною стороною 5 см та кутом при вершині 120° довільно розміщено квадрат зі стороною 1,5 см. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана точка трикутника лежатиме в квадраті.

5. На відрізку довжиною 15 см випадково поставлено дві точки. Знайти ймовірність того, що відстань між цими точками не перевищує 7 см.

6. Відстань між пунктами M і N літак долає за 1 год, а потяг – за 18 год. Потяг у випадковий час протягом доби вирушає з пункту M до N . Знайти ймовірність того, що черговий літак прибуде до пункту N раніше від потяга, якщо між M і N виконується за розкладом один рейс літака щодоби.

7. У ромбі зі стороною 5 см та гострим кутом 60° лежить прямокутник зі сторонами 2 та 3 см. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана у ромбі точка лежатиме і в прямокутнику.

8. З проміжку $[0,1]$ випадковим способом вибирають два дійсних числа. Знайти ймовірність того, що їх сума не більша одиниці, а добуток не перевищує $\frac{2}{9}$.

9. Кожне з двох дійсних додатних чисел не більше 4. Знайти ймовірність того, що їх добуток також буде не більше 4.

10. У середині кола радіусом 5 мм розташовано прямокутник зі сторонами 4 та 6 мм. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана у колі точка лежатиме і в прямокутнику.

Відповіді: 1. 0,36. 2. 0,02. 3. $\frac{4}{9}$. 4. 0,208. 5. $\frac{161}{225}$. 6. $\frac{1103}{1152}$. 7. $\frac{\sqrt{3}}{25}$.
8. $\frac{1+2\ln 2}{9}$. 9. $\frac{1+\ln 4}{4}$. 10. 0,305.

Завдання 3. Ймовірності суми та добутку подій

1. Фірма має можливість отримати два контракти. Ймовірність отримання першого контракту дорівнює 0,9, а другого – 0,8. Вважаючи ці події незалежними, знайти ймовірності подій: а) фірма отримає обидва контракти; б) фірма отримає принаймні один контракт.

2. Надійність лінії зв'язку між об'єктами (ймовірність безвідмовної роботи протягом певного часу) дорівнює 0,75. Для підвищення якості зв'язку встановлено резервну лінію надійністю 0,65. Визначити надійність зв'язку з резервною лінією.

3. Через метеорологічні умови літак було відправлено на запасний аеродром, під час наближення до якого у баках літака залишалося палива на 3 заходи на посадку. Ймовірність посадки літака за першого заходу дорівнює 0,8, за другого – 0,95, за третього – 0,995. Знайти ймовірність вдалої посадки літака.

4. Є 8 кандидатів на отримання роботи. Серед них є люди з відповідною кваліфікацією (подія A) і люди, що закінчили Видавничо-поліграфічний інститут (подія B), та інші. Їх кількості подано в таблиці.

	A	$\bar{A}$	Усього
B	1	3	4
$\bar{B}$	2	2	4
Усього	3	5	8

Усі кандидати мають рівні шанси на отримання роботи. Знайти ймовірність того, що роботу отримає людина без кваліфікації, або яка закінчила Видавничо-поліграфічний інститут.

5. Імовірність виготовлення виробу вищого сорту на першому верстаті становить 0,7, на другому – 0,8. На першому верстаті виготовлено 2 вироби, на другому – 3. Знайти ймовірність того, що всі вироби належать до вищого сорту.

6. Відомо, що в деякому регіоні 40 % компаній мають у штаті юриста і 80 % компаній мають у штаті економіста. Вважаємо, що ці дві події незалежні. Знайти ймовірність того, що фірма має в штаті економіста і юриста.

7. Є два ринки цінних паперів. Інвестиційна фірма направила на обидва ринки водночас 260 акцій різноманітної якості. У визначений день на першому ринку зросли ціни 197 акцій (подія A), а на другому ринку зросли ціни 191 акції (подія B). Одночасно на обох ринках зросли ціни 165 акцій. Інші акції не піднялися в ціні. Результати торгів наведено в таблиці.

	A	$\bar{A}$	Разом
B	165		191
$\bar{B}$			
Разом	197		260

Заповнити порожні місця в таблиці. Знайти ймовірність того, що зросла ціна акцій на першому ринку, якщо відомо, що зросла ціна акцій на другому ринку.

8. На фірмі опитано 100 службовців із метою вивчення стану транспортного обслуговування. Виявилося, що 70 осіб користуються метро (подія A).

Іншими видами транспорту користуються 40 осіб (подія B), а 20 осіб одночасно користуються метро та іншими видами транспорту. Опитування занесено в таблицю.

	A	$\bar{A}$	Разом
B	20		40
$\bar{B}$			
Разом	70		100

Заповнити порожні місця в таблиці. Знайти ймовірність того, що службовець користується метро або іншими видами транспорту.

9. Радіостанція аеропорту надсилає 3 повідомлення для літака. Імовірність підслуховування розвідувальним агентством першого повідомлення дорівнює 0,6; другого – 0,65; третього – 0,7. Знайти ймовірність того, що агентство підслухало: а) тільки два повідомлення; б) усі три повідомлення.

10. З опитаних бізнесменів 80 % віддають перевагу зберіганню грошей у банку (подія A), 60 % вкладає гроші в цінні папери (подія B), 50 % одночасно тримають гроші в банку та вкладають у цінні папери. Результати опитування подано в таблиці.

	A	$\bar{A}$	Разом
B	0,5		0,6
$\bar{B}$			
Разом	0,8		1

Заповнити таблицю до кінця. Знайти ймовірність того, що навмання обраний бізнесмен тримає гроші в банку або у вигляді цінних паперів.

Відповіді: 1. а) 0,72; б) 0,98. 2. 0,9125. 3. 0,99995. 4. 0,75. 5. 0,251. 6. 0,32. 7. 0,864. 8. 0,9. 9. а) 0,446; б) 0,273. 10. 0,9.

Завдання 4. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

1. Серед виробів, які випускаються заводом, 96 % відповідають стандарту. Спрощена схема контролю визнає доброякісною стандартну продукцію з імовірністю 0,98 і нестандартну – з імовірністю 0,05.

Знайти:

- а) ймовірність того, що навання взятий виріб пройде спрощений контроль;
- б) за умови проходження спрощеного контролю ймовірність того, що він відповідає стандарту.

2. Інвестор вкладає свої гроші в акції без ризику, в акції допустимого ризику та акції великого ризику в пропорціях: 10 %, 30 %, 60 %. Імовірність отримання прибутку від цих акцій становить 1, 0,75 та 0,6 відповідно. Знайти:

- а) імовірність того, що інвестор отримає прибуток;
- б) якщо інвестор отримав прибуток, то яка ймовірність того, що він отриманий від акцій без ризику?

3. Економічний факультет провів обстеження працевлаштування своїх випускників. Імовірність того, що людина, яка працює в сфері бізнесу та має прибуток вище N гривень становить 0,9, а поза сферою бізнесу – 0,3. З'ясовано, що 80 % випускників працюють у сфері бізнесу. Знайти:

- а) імовірність того, що навання обраний випускник має прибуток вище N гривень;
- б) за умови отримання прибутку випускником більше N гривень яка ймовірність того, що він працює в сфері бізнесу?

4. Задачу розв'язують самостійно 2 відмінники, 3 посередні студенти та 5 студентів, що навчаються добре. Ймовірність розв'язання задачі відмінником дорівнює 0,9; студентом, який навчається добре, – 0,8 та посереднім – 0,5. До дошки навання викликають одного зі студентів.

- 1) Знайти ймовірність того, що студент розв'язав задачу.
- 2) Викликаний студент розв'язав задачу. Знайти ймовірність того, що він: а) відмінник; б) студент із середнім рівнем успішності.

5. Податкові інспектори роблять перевірку діяльності підприємств. Перший інспектор обслуговує 40 підприємств, серед яких 25 % не мають заборгованостей, другий – 60 підприємств, із них 40 % без заборгованостей. Знайти ймовірність того, що навання обране підприємство:

- а) не має заборгованості;
 - б) підприємство, що не має заборгованості, перевіряв перший інспектор.
6. Фабрика виготовляє однотипну продукцію на трьох конвеєрних лініях, які мають однакову продуктивність. На першій лінії виробляється продукція

тільки першого сорту, на другій лінії продукція першого сорту становить 90 %, а на третій – 85 %. Знайти ймовірність того, що:

- а) випадковим способом узятий виріб буде першосортним;
- б) випадково взятий виріб виявився першосортним і його виготовлено на третій лінії.

7. Менеджер з інвестицій передбачає три варіанти розвитку економічної ситуації на наступний рік: високе зростання, відсутність зростання та спад. Імовірності цих подій становить: 0,6; 0,3 та 0,1 відповідно. Очікується отримання прибутку з наявного активу. Імовірність отримання прибутку становить: випадок високого зростання – 0,8; випадок відсутності зростання – 0,6; випадок спаду – 0,1, знайти ймовірність того, що:

- а) буде отримано прибуток з наявного активу;
- б) цей прибуток з наявного активу отримано в умовах високого зростання економіки.

8. Авіатехнічний склад одержує від першого заводу в 4 рази більше агрегатів, ніж від другого. Брак у продукції першого заводу становить 4 %, а другого – 8 %.

- 1) Знайти ймовірність того, що випадковим способом узятий агрегат виявиться бракованим;
- 2) Випадковим способом узятий агрегат виявився бракованим. На якому заводі він більш імовірно виготовлений?

9. Два робітники виготовили по однаковій кількості деталей. Брак продукції, виготовленої першим робітником, становить 5 %, а другим – 1 %, знайти ймовірність того, що:

- а) узята навмання деталь буде бракованою;
- б) бракована деталь виготовлена першим робітником.

10. На фабриці перша машина виробляє 40 %, а друга – 60 % усієї продукції. У середньому 9 з 1000 одиниць продукції, виготовленої першою машиною, виявляється браком, а для другої машини брак становить 2 одиниці на 500 одиниць продукції:

- а) знайти ймовірність браку продукції, виготовленої на фабриці;
- б) на якій з машин виготовлена більш імовірно певна одиниця продукції, обрана випадково із даної продукції фабрики, що виявилася браком.

Відповіді. 1. а) 0,9428; б) 0,9979. 2. а) 0,885; б) 0,678. 3. а) 0,78; б) 0,923.
4. 1) 0,73; 2) а) 0,247; б) 0,205. 5. а) 0,34; б) 0,294. 6. а) 0,917; б) 0,309.
7. а) 0,67; б) 0,716. 8. 1) 0,048; 2) першим заводом. 9. а) 0,03; б) 0,83.
10. а) 0,006; б) на першій машині.

Завдання 5. Повторення незалежних випробувань. Формула Бернуллі. Формула Муавра–Лапласа. Формула Пуассона

1. Серед великої кількості виробів, що знаходяться в комплекті, 30 % – нестандартні. Знайти ймовірності того, що серед 5 виробів, навмання взятих із комплекту, буде: а) тільки один нестандартний; б) принаймні один нестандартний.

2. Імовірність того, що кожен клієнт, який звернувся в авіакасу, замовить квиток до аеропорту N , дорівнює 0,1. Знайти ймовірності того, що із 100 клієнтів, що звернулись в касу, замовлять квиток до аеропорту N : а) менше 15 осіб; б) 5 – 12 осіб; в) більше 20 осіб.

3. На біржі виставлено 10 цінних паперів. Імовірність того, що вони подорожчають протягом одного дня, дорівнює 0,6. Знайти ймовірності того, що подорожчає: а) рівно 5 паперів; б) не більше, ніж 4 папери; в) 3 – 5 паперів.

4. Авіакомпанія виконує протягом місяця 400 рейсів. Імовірність повного комерційного завантаження кожного рейсу дорівнює 0,8. Знайти ймовірності того, що протягом місяця з повним комерційним завантаженням буде виконано: а) не менше 300 рейсів; б) більша частина рейсів.

5. За статистичними даними у середньому 1 % пасажирів відмовляється від рейсу. Знайти ймовірності того, що з 300 пасажирів, які мають квитки на рейс, відмовляться від польоту: а) не більше 5 пасажирів; б) не менше 3 пасажирів.

6. Інвестор укладає договір на фондовій біржі. Ймовірність укладання однієї угоди за день дорівнює 0,7. Виходячи із припущення, що протягом 10 робочих днів укладається не більше однієї угоди в день, знайти ймовірності таких подій: а) буде укладено 7 угод; б) буде укладено не менше 8 угод; в) жодної угоди не буде укладено.

7. Кількість помилок у рахунках торгових підприємств становить 5 %. Аудитор перевіряє 10 навмання вибраних рахунків. Якщо не виявиться жодної помилки, то рахунки підприємства далі не перевірятимуть. Яка ймовірність того, що в 10 рахунках підприємства: а) не буде жодної помилки; б) буде 3 помилки; в) буде 3 – 5 помилок.

8. Телефонна станція обслуговує 2000 абонентів. Імовірність того, що будь-який абонент зателефонує на станцію протягом години, дорівнює 0,001. Знайти ймовірності того, що протягом години на телефонну станцію зателефонують: а) 5 абонентів; б) не більше 3 абонентів.

9. Імовірність того, що інвестиційний проект принесе через рік прибуток, дорівнює 0,8. Знайти ймовірності того, що із 15 інвестиційних проектів: а) 10 проектів виявляться прибутковими; б) не менше 8 проектів виявляться прибутковими; в) 5 – 9 проектів будуть прибутковими.

10. Фабрика випускає 75 % продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що із 300 виробів, виготовлених фабрикою, кількість першосортних виробів буде: а) 250 виробів; б) 220 – 235; в) не більше 200.

Відповіді. 1. а) 0,36; б) 0,832. 2. а) 0,9526; б) 0,7; в) 0,00048. 3. а) 0,2; б) 0,166; в) 0,3548. 4. а) 0,99; б) 1. 5. а) 0,916; б) 0,084. 6. а) 0,267; б) 0,38; в) $(0,3)^{10}$. 7. а) 0,01; б) 0,0011; в) 0,001146. 8. а) 0,0361; б) 0,86. 9. а) 0,103; б) 0,9768; в) 0,018. 10. а) 0,00023; б) 0,648; в) 0,00048.

Завдання 6. Дискретні випадкові величини

1. Продавець морозива дійшов висновку, що рівень продажу залежить від погоди: сонячної, похмурої та холодної. Сонячні дні становлять 50 %, холодні – 10 %. Виторг від продажу морозива становить 290, 260 і 225 грн за день відповідно до стану погоди. Неповернені витрати на морозиво становлять 100 грн за день. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – прибутку від продажу морозива та визначити її числові характеристики.

2. Цінні папери на біржі кожного дня можуть із ймовірністю 0,5 подорожчати на 10 %. Спостереження ведеться три дні. Початкова вартість цінних паперів 5 000 грн. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X –

вартості цінних паперів, вважаючи її розподіленою за біномним законом та знайти її числові характеристики.

3. Огляд рахунків 500 інвесторів на фондовій біржі дав таку інформацію про кількість угод протягом 10 робочих днів:

Кількість угод	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кількість власників фінансових інструментів	136	98	84	76	38	28	14	10	10	3	3

Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – кількості угод та визначити її числові характеристики.

4. Корпорація вкладає гроші у купівлю земельної ділянки вартістю 100 000 у. о., сподіваючись, що за два роки ціна на земельну ділянку зросте на $q\%$. Є чотири прогнози зміни $q\%$ за два роки:

$q, \%$	50	45	40	30
Імовірність	0,2	0,3	0,3	0,2

Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – вартості земельної ділянки за два роки та визначити її числові характеристики.

5. Продавець кафе встановив такий закон розподілу рівня продажів прохолоджувальних напоїв залежно від погоди:

	Сонячна	Похмура	Холодна
Сума продажів	150	100	40
Ймовірність	0,3	0,5	0,2

Загальна собівартість напоїв становить 80 грн. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – величини прибутку за один день та визначити її числові характеристики.

6. У рекламних цілях торгова фірма вкладає в кожен десяту одиницю товару приз вартістю 100 грн. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – розміру виграшу за 5 покупок та знайти її числові характеристики.

7. Клієнти банку, які не зв'язані між собою, не повертають кредити в зазначений термін з імовірністю 0,1. Побудувати ряд розподілу випадкової

величини X – кількості повернених кредитів із 5 виданих та знайти її числові характеристики.

8. Контрольна робота складається із трьох запитань. На кожне запитання запропоновано 4 відповіді, серед яких одна правильна. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – кількості правильних відповідей за простого вгадування та знайти її числові характеристики.

9. У білеті є три задачі. Ймовірність правильного розв'язання студентом першої задачі дорівнює 0,9; другої – 0,8; третьої – 0,7. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – кількості правильно розв'язаних задач у білеті та знайти її числові характеристики.

10. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості пакетів з трьох акцій, за якими власником буде отримано прибуток, якщо ймовірність отримання прибутку за кожним пакетом дорівнює 0,5; 0,6 та 0,7. Визначити числові характеристики випадкової величини X .

Відповіді:

1. $M(X) = 171,5$; $D(X) = 440,25$.

2. $M(X) = 5788,125$; $D(X) = 228424,61$; $\sigma(X) = 477,94$.

X	5000	5500	6050	6655
P	$0,5^3$	$3 \cdot 0,5^3$	$3 \cdot 0,5^3$	$0,5^3$

3. $M(X) = 2,154$; $D(X) = 4,566$.

4. $M(X) = 41500$; $D(X) = 45239076$.

5. $M(X) = 2060$; $D(X) = 584400$.

X	800	2000	3000
P	0,2	0,5	0,3

6.

X	0	100	200	300	400	500
P	$\frac{9^5}{10^5}$	$5 \cdot \frac{9^4}{10^5}$	$10 \cdot \frac{9^3}{10^5}$	$10 \cdot \frac{9^2}{10^5}$	$5 \cdot \frac{9^2}{10^5}$	$\frac{1}{10^5}$

7. $M(X) = 4,5$; $D(X) = 0,45$.

X	0	1	2	3	4	5
P	0,00001	0,00045	0,0081	0,0729	0,32805	0,59049

8. $M(X) = 0,75$; $D(X) = 0,5625$.

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

9. $M(X) = 2,4$; $D(X) = 0,46$.

X	0	1	2	3
P	0,006	0,092	0,398	0,504

10. $M(X) = 1,8$; $D(X) = 0,7$.

X	0	1	2	3
P	0,06	0,29	0,44	0,21

Завдання 7. Неперервні випадкові величини

7.1. Задана функція розподілу неперервної випадкової величини X . Знайти коефіцієнт A ; записати щільність розподілу $f(x)$; визначити числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, а також $P(\alpha \leq X \leq \beta)$. Накреслити графіки функції розподілу та щільності розподілу.

$$1. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ Ax^5, & 0 < x \leq 3, \quad \alpha = 0,25; \beta = 0,75; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

$$2. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ A\left(2x - \frac{x^2}{3}\right), & 0 < x \leq 3, \quad \alpha = 1; \beta = 2; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

$$3. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ A(-x^2 + 4x), & 0 < x \leq 2, \quad \alpha = 0,5; \beta = 1,5; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$$4. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ Ax^2, & 0 < x \leq 1, \alpha = 0,3; \beta = 0,8; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$5. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ Ax^3, & 0 < x \leq 2, \alpha = 0,2; \beta = 1,7. \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

7.2. Неперервна випадкова величина задана щільністю розподілу $y = f(x)$. Записати інтегральну функцію розподілу $y = F(x)$; визначити числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, а також $P(\alpha \leq X \leq \beta)$. Накреслити графіки диференціальної та інтегральної функцій розподілу.

$$6. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, x > \pi/2; \\ \cos x, & 0 < x \leq \pi/2; \end{cases} \alpha = -\pi/4; \beta = \pi/4.$$

$$7. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, x > \pi/2; \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi/2; \end{cases} \alpha = -\pi; \beta = \pi/4.$$

$$8. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \pi/6, x > \pi/3; \\ 3\sin 3x, & \pi/6 < x \leq \pi/3; \end{cases} \alpha = 0; \beta = \pi/4.$$

$$9. f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos^2 x, & |x| \leq \pi/2; \\ 0, & |x| > \pi/2; \end{cases} \alpha = 0; \beta = \pi/4.$$

$$10. f(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & (a > 0), x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} \alpha = 1; \beta = 2.$$

Відповіді:

$$1. A = \frac{1}{243}; M(X) = 2,5; D(X) = \frac{5}{28}; p = 0,00097.$$

$$2. A = \frac{1}{3}; M(X) = 1; D(X) = 0,5; p = \frac{1}{3}.$$

$$3. A = \frac{1}{4}; M(X) = \frac{2}{3}; D(X) = \frac{2}{9}; p = 2.$$

$$4. A = 1; M(X) = \frac{2}{3}; D(X) = \frac{1}{18}; p = 0,55.$$

$$5. A = \frac{1}{8}; M(X) = \frac{3}{2}; D(X) = \frac{3}{20}; p = 0,613.$$

$$6. M(X) = \frac{\pi}{2} - 1; D(X) = \pi - 3; p = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$7. M(X) = 1; D(X) = \pi - 3; p = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$8. M(X) = \frac{\pi - 1}{3}; D(X) = \frac{\pi - 3}{9}; p = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$9. M(X) = 0; D(X) = \frac{\pi^2 - 6}{12}; p = \frac{\pi + 2}{4\pi}.$$

$$10. M(X) = \frac{1}{a}; D(X) = \frac{1}{a^2}; p = e^{-a} - e^{-2a}.$$

Завдання 8. Деякі закони розподілу неперервних випадкових величин

1. Магазин отримав 1000 пляшок мінеральної води в скляній тарі. Ймовірність того, що після перевезення пляшка виявиться розбитою, дорівнює 0,003. Знайти ймовірності того, що магазин отримає розбитих пляшок: а) тільки дві; б) менше двох; в) більше двох; г) принаймні одну.

2. Випадкова величина X задає час безвідмовної роботи системи і має щільність розподілу $f(x) = Ae^{-0,1x}$, $t \geq 0$. Знайти коефіцієнт A та надійність (імовірність безвідмовної роботи системи) протягом часу τ . Яка ймовірність того, що час безвідмовної роботи системи буде меншим від математичного сподівання?

3. Час відновлення каналу зв'язку має показниковий розподіл. Середній час відновлення дорівнює 10 хв. Яка ймовірність того, що час відновлення буде в межах 5 – 25 хв?

4. Час приймання та оброблення одного повідомлення – випадкова величина X , яка розподілена за показниковим законом. У середньому за хвилину приймають 6 повідомлень. Яка ймовірність того, що повідомлення буде прийняте та оброблене протягом 4 хв?

5. Припускаючи, що річний дохід деяких фізичних осіб розподілений нормально із середнім значенням 15 000 грн і стандартним відхиленням 3 000 грн, визначити, який відсоток родин отримає: а) принаймні 15 000 грн; б) більше 20 000 грн.

6. Випадкова величина X – кількість продажів ділера, розподілена нормально з середнім значенням 29 і середнім відхиленням 7. Знайти ймовірність того, що кількість продажів перебуватиме в межах: а) 16 – 18 одиниць; б) 28 – 35 одиниць.

7. Компанія встановила, що випадкова величина X – кількість робочих днів, пропущених співробітниками протягом року через хворобу, розподілена за нормальним законом з середнім значенням 78 днів і стандартним відхиленням – 14 днів. Знайти ймовірність того, що кількість робочих днів, пропущених через хворобу, буде: а) не більше 50; б) 50 – 70.

8. Відомо, що прибутковість пакета акцій фірми розподілена за законом Гаусса із середнім значенням 12 % і стандартним відхиленням 1,2 %. Знайти ймовірність того, що: а) акції матимуть прибутковість не більше 10 %; б) акції матимуть прибутковість 10 – 14 %.

9. Час, який співробітники фірми витрачають на дорогу до місця роботи, розподілений за нормальним законом із середнім значенням 40 хв і стандартним відхиленням 6 хв. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний співробітник витратить на дорогу: а) більше 50 хв; б) 30 – 45 хв.

10. Прибуток фірми має нормальний розподіл із середнім значенням 12 000 грн на місяць і стандартним відхиленням 1 000. Визначити інтервал прибутку із надійністю 95 %.

Відповіді: 1. а) 0,224; б) 0,199; в) 0,577; г) 0,95. 2. $A=0,1$; $p=1-e^{-1}$. 3. 0,524. 4. ≈ 1 . 5. а) 0,5; б) 0,047. 6. а) 0,02677; б) 0,36078. 7. а) 0,023; б) 0,26. 8. а) 0,04746; б) 0,90508. 9. а) 0,04746; б) 0,74927. 10. (10,04; 13,96).

**Завдання 9. Система двох дискретних випадкових величин.
Функція одного випадкового аргумента**

1. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом із $M(X) = 0$. Знайти закон розподілу функції $Y = X^3$.

2. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \quad x > \frac{\pi}{2}; \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання функції $Y = X^2$.

3. Задані закони розподілів незалежних випадкових величин X та Y

X	-1	0	1
P	0,3	0,5	0,2

та Y

Y	0	1
P	0,4	0,6

Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $Z = X^2 \cdot Y^3$, використовуючи властивість математичного сподівання

$$M(Z) = M(X^2 \cdot Y^3) = M(X^2) \cdot M(Y^3).$$

4. Випадкова величина X рівномірно розподілена в інтервалі $(-1, 1)$. Знайти щільність розподілу імовірності випадкової величини $Y = X^2$.

5. Випадкова величина X рівномірно розподілена в інтервалі $(1, 2)$. Знайти $M(Z) = M(3X^2 - 2X + 1)$ та $D(Z) = D(X^2 + 1)$.

6. Фірма планує відкрити ще одне кафе. Для оптимального планування можливої кількості відвідувачів кафе протягом деякого часу аналітики фірми провели статистичне дослідження кількості відвідувачів й отриманого прибутку. У таблиці подано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин: X – кількість відвідувачів кафе за деякий час і Y – прибуток, який отримала фірма в умовних одиницях. Вважати, що k – номер варіанта.

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	k	$k + 2$	$k + 4$	$k + 6$
k	$0,002(35 - k)$	$0,002(k + 40)$	$0,002(70 - k)$	$0,002(k + 20)$
$k + 5$	$0,002(k + 30)$	$0,002(55 - k)$	$0,002(k + 25)$	$0,002(40 - k)$
$k + 10$	$0,002(50 - k)$	$0,002(k + 5)$	$0,002(80 - k)$	$0,002(k + 50)$

Виконати такі завдання:

- 1) скласти закони розподілу одновимірних випадкових величин X та Y ;
- 2) знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкових величин X та Y ;
- 3) обчислити кореляційний момент $\hat{E}(X, Y)$ і коефіцієнт кореляції $\rho(X, Y)$;
- 4) побудувати умовний закон розподілу випадкової величини X за умови, що випадкова величина Y набуває значення $k + 10$ та умовний закон розподілу випадкової величини Y за умови, що випадкова величина X набуває значення $k + 2$;

5) знайти умовні математичні сподівання $M\left(\frac{Y}{X} = k + 2\right)$, $M\left(\frac{X}{Y} = k + 10\right)$.

Відповіді:

1. $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-y^{\frac{2}{3}}}{2\sigma^2}} \cdot \left| (y^{\frac{1}{3}})' \right|$.

2. $\pi - 2$.

3. 0,3; 0,2.

4. $g(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}}, & y \in (0,1); \\ 0, & y \notin (0,1). \end{cases}$

5. 5; 0,76.

6. Для $k = 3$: 2) $M(X) = 6,144$; $D(X) = 4,579$; $\sigma(X) = 2,14$ $M(Y) = 8,2$; $D(Y) = 17,46$; $\sigma(Y) = 4,17$; 3) $\hat{E}(X, Y) = 0,8712$; $\rho(X, Y) = 0,0976$;

5) $M\left(\frac{Y}{X} = 5\right) = 5,525$; $M\left(\frac{X}{Y} = 13\right) = 6,463$.

Завдання 10. Вибірka та її основні характеристики

За результатами спостережень над випадковою величиною X , які подано у таблиці, знайти емпіричну функцію розподілу, вибіркoве середнє та незміщену оцінку дисперсії.

1.

x_i	-1	1	2	3	4	5
n_i	3	8	20	16	7	2

2.

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	5	8	15	12	7	3

3.

x_i	-2	-1	0	1	2	3
n_i	2	8	20	9	8	3

4.

x_i	-2	-1	0	1	2	3
n_i	3	12	20	8	5	2

5.

x_i	-3	-2	-1	0	1	2
n_i	2	6	25	10	5	2

6.

x_i	-4	-3	-1	0	2	3
n_i	1	7	23	10	7	2

7.

x_i	-1	0	1	2	4	5
n_i	3	9	18	10	8	2

8.

x_i	-2	-1	2	3	4	5
n_i	5	10	15	8	7	5

9.

x_i	-3	-2	-1	1	2	3
n_i	1	7	25	10	5	2

10.

x_i	0	1	2	3	5	6
n_i	2	7	20	10	8	3

Відповіді: 1. $\bar{x} = 2,34$; $s^2 = 0,915$. 2. $\bar{x} = 3,22$; $s^2 = 6,298$. 3. $\bar{x} = 0,44$; $s^2 = 1,517$. 4. $\bar{x} = 0,12$; $s^2 = 1,414$. 5. $\bar{x} = -0,68$; $s^2 = 1,161$.

Завдання 11. Надійні інтервали

Знайти надійний інтервал для оцінювання математичного сподівання μ нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибірку середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ .

1. $\bar{x} = 75,17$; $n = 36$; $\sigma = 6$.

2. $\bar{x} = 75,16$; $n = 49$; $\sigma = 7$.

3. $\bar{x} = 75,15$; $n = 64$; $\sigma = 8$.

4. $\bar{x} = 75,14$; $n = 81$; $\sigma = 9$.

5. $\bar{x} = 75,13$; $n = 100$; $\sigma = 10$.

6. $\bar{x} = 75,12$; $n = 121$; $\sigma = 11$.

7. $\bar{x} = 75,11$; $n = 144$; $\sigma = 12$.

8. $\bar{x} = 75,10$; $n = 169$; $\sigma = 13$.

9. $\bar{x} = 75,09$; $n = 196$; $\sigma = 14$.

10. $\bar{x} = 75,08$; $n = 225$; $\sigma = 15$.

Відповіді: 1. (73,21; 77,13). 2. (73,2; 77,12). 3. (73,19; 77,12). 4. (73,18; 77,1). 5. (73,17; 77,09).

Завдання 12. Вибіркові характеристики зв'язку

За вибірковими даними пари випадкових величин (X, Y) знайти вибірковий коефіцієнт кореляції пари і рівняння лінійної регресії Y на X та X на Y .

1.

x_i	0,1	1,1	2,0	3,0	4,0	5,0
y_i	0,5	0,9	1,4	2,4	3,5	3,9

2.

x_i	6,1	7,0	8,0	9,1	10	12
y_i	4,5	5,1	7,1	7,8	8,2	10,4

3.

x_i	1	2	4	8	9	10
y_i	12	10	9	6	4	3

4.

x_i	-1,1	0	2	3	4	6
y_i	0,1	1	1,5	2	3	4

5.

x_i	2	4	6	8	9,5	11
y_i	4,5	7	8	7,5	9	10

6.

x_i	0	2	3,4	4	5	6
y_i	5	4	3,5	2	1	0

7.

x_i	2	4	6	8	10	12
y_i	4,5	7	8	8,5	9	10

8.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	0,1	0,3	0,5	0,8	0,9	1

9.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	1	0,9	0,8	0,5	0,3	0,1

10.

x_i	0	2	3	4	5	6
y_i	6	4,5	3,5	2	1	0

*Відповіді:*1. $r = 0,45$; $y = -0,25x + 1,475$; $x = 0,81y + 0,79$.2. $r = 0,255$; $y = 0,26x + 4,89$; $x = 0,25y + 6,93$.3. $r = -0,82$; $y = -0,76x + 11,64$; $x = -0,88y + 12,12$.4. $r = 0,82$; $y = 0,44x + 0,91$; $x = 1,53y - 0,63$.**Завдання 13. Перевірка статистичних гіпотез**

13.1. За таблицею статистичного розподілу побудувати полігон розподілу, оцінити правдоподібність гіпотези, що випадкова величина розподілена за законом Пуассона. Перевірити узгодженість між емпіричними та теоретичними даними за допомогою критерію Пірсона. Рівень значущості $\alpha = 0,05$.

№	X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	n	37	37	18	6	2	0	0	0	0	0
2		29	36	22	9	3	1	0	0	0	0
3		22	33	25	13	5	2	0	0	0	0
4		17	30	27	16	7	2	1	0	0	0
5		14	27	27	18	9	4	1	0	0	0
6		11	24	27	20	11	5	2	0	0	0
7		8	21	26	21	13	7	3	1	0	0
8		6	18	24	22	15	8	4	2	1	0
9		5	15	22	22	17	10	5	2	1	0
10		4	13	20	22	18	12	6	3	1	1

13.2. Проведено $n = 500$ випробувань випадкової величини X . Результати випробувань зведені в групований статистичний ряд. Користуючись критерієм згоди χ^2 , визначити, чи не суперечить вибірковим даним гіпотеза про те, що випадкова величина розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням, рівним вибірковому середньому, і дисперсією, рівною виправленій вибірковій дисперсії. Рівень значущості $\alpha = 0,1$.

№	інтервали	$[-4, -3)$	$[-3, -2)$	$[-2, -1)$	$[-1, 0)$	$[0, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4)$
1	n_i	5	25	70	134	120	90	46	10
2		4	26	68	135	121	92	45	9
3		4	25	70	135	122	90	46	8
4		7	25	69	135	123	89	45	7
5		8	26	72	135	122	91	43	3
6		2	24	72	136	121	90	47	8
7		6	24	69	135	120	92	45	9
8		7	20	73	132	120	92	45	11
9		4	24	69	133	121	91	47	11
10		6	26	71	135	119	89	45	9